UNIVERSIDAD DEL ATLÁNTICO
MATUA
Facultad de Ciencias Básicas
©Programa de Matemáticas
Vol 2. No 2 (2015)
Revista del programa de Matemáticas (2015) Pag. 12-36

Estructuras booleanas y el código genético: algunos comentarios

Boolean structures and the genetic code: some comments

Yamilet QUINTANA[1]
[1]*Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas, Universidad Simón Bolívar, Venezuela*
e-mail: yquintana@usb.ve

Sandy HERNÁNDEZ[1]
[1]*Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas, Universidad Simón Bolívar, Venezuela*
e-mail: shernandez2008@hotmail.com

Recibido:13/10/2015 - Aceptado:03/11/2015

Resumen

Este es un artículo de carácter divulgativo en el cual nuestro objetivo es estudiar algunos resultados clásicos acerca de estructuras booleanas desde el punto de vista de P. Halmos [4]. En particular, estamos interesados en las demostraciones de dos teoremas fundamentales de isomorfismos de álgebras booleanas. También, discutimos una reciente e ilustrativa representación del ARNm en términos del álgebra booleana $\mathbb{Z}_2^6$ [3].

Palabras claves: estructuras booleanas, álgebras booleanas, anillos booleanos, teoremas de isomorfismo, código genético.

Abstract

This is a paper of divulgative character in which our aim is to study some classical results about boolean structures from the viewpoint of P. Halmos [4]. In particular, we are interested in the proofs of two fundamental isomorphism theorems of boolean algebras. Also, we discuss a recent and illustrative representation of the RNAm in terms of the boolean algebra $\mathbb{Z}_2^6$ [3].

Keywords: boolean structures, boolean algebras, boolean rings, isomorphism theorems, genetic code.

1. Introducción

Entre los mecanismos de programación que hacen posible una simple búsqueda en internet se encuentran unos principios de lógica que fueron concebidos hace aproximadamente 161 años. Tales principios pueden ser representados mediante ciertas estructuras algebraicas que reciben el nombre de álgebras de Boole o álgebras booleanas.

Las álgebras de Boole fueron introducidas por el matemático inglés George Boole (1815-1864) en el año de 1847 en la memoria "The Mathematical Analysis of Logic", y estudiadas con más detalle siete años más tarde en su libro *An Investigation of the Laws of Thought* [2], con el objeto de unificar la teoría de conjuntos y el cálculo proposicional.

Boole desarrolló la idea de que las proposiciones lógicas (asertos, frases o predicados de la lógica clásica) podían ser tratadas mediante herramientas matemáticas. Según Boole, estas proposiciones pueden ser representadas mediante símbolos y la teoría que permite trabajar con estos símbolos, sus entradas (variables) y sus salidas (respuestas) es la lógica simbólica desarrollada por él. Dicha lógica simbólica cuenta con operaciones lógicas que siguen el comportamiento de reglas algebraicas.

En 1904, E. V. Huntington propone un conjunto de postulados para determinar formalmente los sistemas algebraicos propuestos por Boole. Estos postulados básicamente definen la relación de equivalencia, las operaciones y propiedades de la suma, producto y complementación de un álgebra booleana a partir de los resultados de Boole. Nuevamente, en 1933 E. V. Huntington (cfr. [7]) vuelve a renovar la axiomática booleana demostrando que el álgebra booleana sólo necesita una sola operación binaria, una sola operación unaria y que requiere de un único axioma; al cual se le conoce como axioma de Huntington.

Por otro lado, podemos encontrar en el libro de Paul Halmos de 1974, titulado *Lectures on Boolean Algebras* [4] un enfoque totalmente algebraico de las álgebras booleanas, estableciendo una conexión entre los anillos y las álgebras de Boole.

A mediados del siglo XX las álgebras booleanas resultaron de una gran importancia práctica, importancia que se ha ido incrementando hasta nuestros días, en el manejo de la información digital. Las primeras computadoras estaban compuestas de sistemas de numeracón decimal, pero en 1930 John Von Neumann propuso sustituir este sistema de numeración decimal por un sistema de numeración binario, que como sabemos, no es más que un sistema basado en la lógica simbólica introducida por Boole. Con esta nueva estructura de numeración, John Von Neumann pudo enunciar el modelo de arquitectura que define la estructura interna de las computadoras desde la primera generación y con ello, comenzó la era de la computación digital [5]. En 1936, Alan Turing utilizó las álgebras de Boole de forma teórica, en su diseño de la máquina de Turing [11].

Por su parte, en 1940 Claude Shannon en su tesis doctoral titulada "A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits" logró establecer una relación entre las álgebras de Boole con los circuitos digitales, estableciendo así, la base de la electrónica digital moderna [10].

Otra aplicación importante de las álgebras de Boole puede ser encontrada en la genética, un ejemplo reciente de esto fue dado en 2007, por el grupo de investigadores R. Grau, M. Chavez, R. Sanchez, E. Morgado, G. Casas e I. Bonet. Estos investigadores construyeron un modelo matemático del código genético, basado en un álgebra de Boole particular, la cual facilita la comprensión de la lógica subyacente en el código genético (ver [3]). Más específicamente, este modelo refleja una fuerte conexión entre los órdenes del código genético y las propiedades físico-químicas de los aminoácidos.

La presente nota pretende hacer un breve estudio de algunos resultados clásicos acerca de estructuras booleanas desde el punto de vista de P. Halmos [4]. En particular, estamos interesados en las demostraciones de dos teoremas fundamentales de isomorfismos de álgebras booleanas. También, discutiremos una reciente e ilustrativa representación del ARNm en términos del álgebra booleana $\mathbb{Z}_2^6$ (cfr. [3]).

2. Estructuras booleanas

Esta sección esta dedicada a la definición, algunos ejemplos y propiedades básicas de anillos y álgebras booleanos. El lector interesado en un estudio más detallado puede consultar [4, 12].

Un anillo booleano $\langle A; +; \cdot \rangle$, es un anillo con unidad en el que todos sus elementos son idempotentes, es decir, $\forall a \in A$, $a^2 = a \cdot a = a$.

EJEMPLO 2.1. *Sea $\langle A; +; \cdot \rangle$ un anillo arbitrario con unidad, entonces $B = \{0, 1\} \subset A$ es un anillo booleano.*

EJEMPLO 2.2. *Denotemos por $\mathbb{Z}_2$ a el conjunto de los enteros módulo 2, es decir, $\mathbb{Z}_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$. Si tomamos este conjunto con la suma y el producto habitual de las clases, es sencillo chequear que $\mathbb{Z}_2$ es un anillo con unidad, donde $\overline{0}$ y $\overline{1}$ representan el elemento neutro y la identidad multiplicativa, respectivamente. Es claro que todos sus elementos son idempotentes, ya que*

$$\begin{aligned} \overline{0} \cdot \overline{0} &= \overline{0 \cdot 0} = \overline{0}, \\ \overline{1} \cdot \overline{1} &= \overline{1 \cdot 1} = \overline{1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\langle \mathbb{Z}_2; +; \cdot \rangle$ es un anillo booleano.

EJEMPLO 2.3. *Dado X un conjunto no vacío, consideremos $\mathbb{Z}_2^X$ como el conjunto de las funciones de X a $\mathbb{Z}_2$, es decir,*

$$\mathbb{Z}_2^X = (\mathbb{Z}_2)^X = \{f \,/\, f : X \to \{\overline{0}, \overline{1}\} \text{ es función}\}.$$

Las operaciones de suma y producto se definen de la forma siguiente: para $f, g \in \mathbb{Z}_2^X$, $f + g$ y $f \cdot g$ están dadas por

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x), \\ (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x), \end{aligned}$$

para cada $x \in X$.

Y los elementos distinguidos 0 y 1 son las funciones definidas por

$$\begin{aligned} 0(x) &= \overline{0}, \\ 1(x) &= \overline{1}, \end{aligned}$$

para cada $x \in X$. Entonces es posible chequear que $\langle \mathbb{Z}_2^X; +; \cdot \rangle$ es anillo booleano.

PROPOSICIÓN 2.1. *Sea $\langle A; +; \cdot \rangle$ un anillo booleano arbitrario, entonces*

i) A tiene característica 2, es decir, para todo $a \in A$ se cumple que $a + a = 0$.

ii) A es conmutativo.

Demostración. Sea A un anillo booleano.

$i)$ Si $a \in A$, usando la idempotencia de A tenemos:

$$a + a = (a + a)^2 = a^2 + 2a + a^2 = a + a + a + a,$$

luego, por las leyes de cancelación obtenemos:

$$0 = a + a.$$

$ii)$ Si $a, b \in A$, usando la idempotencia de A tenemos:

$$a + b = (a + b)^2 = a^2 + (a \cdot b) + (b \cdot a) + b^2 = a + (a \cdot b) + (b \cdot a) + b,$$

luego, por las leyes de cancelación obtenemos:

$$0 = (a \cdot b) + (b \cdot a).$$

Ahora bien, de $i)$ se deduce que $b \cdot a = -(b \cdot a)$, así que

$$0 = (a \cdot b) + (b \cdot a) = (a \cdot b) - (b \cdot a),$$

luego, $0 = (a \cdot b) - (b \cdot a)$, o equivalentemente, $a \cdot b = b \cdot a$.

$\square$

PROPOSICIÓN 2.2. *Sean $\langle R; +; \cdot \rangle$ un anillo conmutativo con unidad y $A = \{p \in R : p^2 = p\}$. Entonces definiendo las siguientes operaciones binarias sobre A:*

$$\begin{aligned} p \oplus q &:= p + q - 2(p \cdot q), \\ p \odot q &:= p \cdot q, \end{aligned}$$

tenemos que $\langle A; \oplus; \odot \rangle$ es un anillo booleano.

Demostración. Los elementos de A son idempotentes por definición. Faltaría ver que A con las operaciones $\oplus$ y $\odot$ tiene estructura de anillo con unidad.

Usando la idempotencia de A, tenemos que si $p, q \in A$ entonces

$$\begin{aligned} (p \oplus q)^2 &= (p + q - 2(p \cdot q))^2 = (p + q)^2 - 4(p + q) \cdot (p \cdot q) + 4(p^2 \cdot q^2) \\ &= p^2 + 2(p \cdot q) + q^2 - 4(p^2 \cdot q + p \cdot q^2) + 4(p^2 \cdot q^2) \\ &= p + 2(p \cdot q) + q - 4(p \cdot q) - 4(p \cdot q) + 4(p \cdot q) \\ &= p + q - 2(p \cdot q) = p \oplus q. \end{aligned}$$

Así que $p \oplus q \in A$, siempre que $p, q \in A$.

Análogamente, si $p, q \in A$ tenemos que

$$\begin{aligned} (p \odot q)^2 &= (p \odot q) \odot (p \odot q) = (p \cdot q) \cdot (p \cdot q) \\ &= (p \cdot q)^2 = p^2 \cdot q^2 = p \cdot q = p \odot q. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $p \odot q \in A$.

La conmutatividad de la suma $\oplus$ se desprende de la conmutatividad de la suma y el producto en el anillo R. Con respecto a la asociatividad de la suma tenemos que si $p, q, r \in A$, entonces:

$$\begin{aligned}
(p \oplus q) \oplus r &= (p + q - 2(p \cdot q)) \oplus r = p + q + r - 2(p \cdot q) - 2((p + q) \cdot r) + 4((p \cdot q) \cdot r) \\
&= p + q + r - 2(p \cdot q) - 2(p \cdot r) - 2(q \cdot r) + 4(p \cdot (q \cdot r)) \\
&= q + r - 2(q \cdot r) + p - 2(p \cdot (q + r - 2(q \cdot r))) = p - 2(p \cdot q \oplus r) + (q \oplus r) \\
&= p \oplus (q \oplus r).
\end{aligned}$$

Claramente el elemento neutro con respecto a la suma $\oplus$ es $0 \in R$, ya que $0 \in A$ y para todo $p \in A$ tenemos $0 \oplus p = p \oplus 0 = p$. También es sencillo verificar que cada elemento de A es su propio inverso con respecto a la suma ya que para cada $p \in A$:

$$p \oplus p = p + p - 2(p \cdot p) = p + p - 2p^2 = p + p - 2p = 2p - 2p = 0.$$

Por lo cual, para todo $p \in A$, siempre existe $\tilde{p} \in A$ tal que $p \oplus \tilde{p} = \tilde{p} \oplus p = 0$.

La asociatividad del producto $\odot$ es inmediata, pues el producto $\odot$ coincide con el producto del anillo R. Además, ya que R tiene unidad 1 y ésta pertenece a A, entonces 1 también es unidad en A.

Finalmente, el producto $\odot$ es distributivo respecto a la suma $\oplus$. Mostraremos sólo que para $p, q, r \in A$ se satisface que $p \odot (q \oplus r) = (p \odot q) \oplus (p \odot r)$, pues la identidad $(q \oplus r) \odot p = (q \odot p) \oplus (r \odot p)$ se deduce en forma análoga. Por definición de las operaciones $\oplus$, $\odot$, usando que el producto de R es distributivo con respecto a la suma de R, la idempotencia de los elementos de A, la asociatividad del producto de R y la conmutatividad de R tenemos:

$$\begin{aligned}
p \odot (q \oplus r) &= p \cdot (q + r - 2(q \odot r)) \\
&= p \cdot q + p \cdot r - 2(p \cdot q \cdot r) = p \cdot q + p \cdot r - 2(p^2 \cdot q \cdot r) \\
&= p \cdot q + p \cdot r - 2((p \cdot q) \cdot (p \cdot r)) \\
&= (p \cdot q) \oplus (p \cdot r) = (p \odot q) \oplus (p \odot r).
\end{aligned}$$

Por tanto, $\langle A; \oplus; \odot \rangle$ es un anillo booleano.

□

Para ilustrar la proposición 2.2, presentaremos algunos ejemplos (cfr. [6, 8]):

EJEMPLO 2.4. *Consideremos el anillo $\mathbb{Z}$ de los números enteros, entonces el conjunto de sus elementos idempotentes $A = \{0, 1\}$ es un anillo booleano, en virtud de la proposición 2.2. Más aún, si consideramos la aplicación $\Omega : \mathbb{Z}_2 \to \{0, 1\}$ dada por $\Omega(\overline{0}) = 0$ y $\Omega(\overline{1}) = 1$, obtendremos que Ω es un isomorfismo de anillos.*

EJEMPLO 2.5. *Consideremos los anillos de los enteros módulo 6, módulo 10 y módulo 14; $\mathbb{Z}_6 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$, $\mathbb{Z}_{10} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}\}$ y $\mathbb{Z}_{14} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}\}$, respectivamente. En virtud de la proposición 2.2, los respectivos conjuntos de elementos idempotentes de estos anillos $A = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{3}, \overline{4}\}$, $B = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{5}, \overline{6}\}$ y $C = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{7}, \overline{8}\}$ tienen estructura de anillos booleanos.*

Note que siempre que $\mathbb{Z}_n$ sea tal que n es el producto de primos distintos, podemos obtener un conjunto de elementos idempotentes no trivial.

Ahora estamos en condiciones de mostrar otro ejemplo clásico de anillos booleanos.

EJEMPLO 2.6. *Sean X un conjunto arbitrario no vacío y $\mathcal{P}(X)$ la familia de todos los subconjuntos de X. Podemos dotar a $\mathcal{P}(X)$ de una estructura de anillo booleano por medio de las siguientes operaciones binarias: Para $P, Q \in \mathcal{P}(X)$ definimos:*

$$P \oplus Q = (P \setminus Q) \cup (Q \setminus P), \tag{1}$$

$$P \odot Q = P \cap Q. \tag{2}$$

En este caso, los elementos distinguidos vienen dados por

$$\begin{aligned} 0 &= \emptyset, \\ 1 &= X. \end{aligned}$$

Note que de acuerdo a la ecuación , $P \oplus Q$ corresponde a lo que en teoría de conjuntos se conoce como deferencia simétrica de conjuntos, (ver por ejemplo, [1, 9]).

Una manera de ver que $\langle \mathcal{P}(X); \oplus; \odot \rangle$ es un anillo booleano es establecer una biyección entre $\mathcal{P}(X)$ y $\mathbb{Z}_2^X$ en la cual las operaciones $\oplus$, $\odot$ y los elementos distinguidos en $\mathcal{P}(X)$ correspondan exactamente con las operaciones y elementos distinguidos de $\mathbb{Z}_2^X$.

En virtud del ejemplo 2.4, los anillos $\mathbb{Z}_2$ y $\{0, 1\}$ son isomorfos, por lo cual haremos referencia a $\mathbb{Z}_2$ y $\{0, 1\}$ como si fueran el mismo conjunto.

Consideremos ahora la función $\varphi : \mathcal{P}(X) \to \{0, 1\}^X$ definida de la siguiente manera: para cada $P \in \mathcal{P}(X)$, $\varphi(P) \in \{0, 1\}^X$ es la función dada por

$$\varphi(P)(x) := \chi_P(x) = \begin{cases} 1, \ si\ x \in P, \\ 0, \ si\ x \in X \setminus P, \end{cases}$$

con $x \in X$.

La función φ es inyectiva: ya que si $\varphi(P) = \varphi(Q)$ entonces para $x \in X$ tenemos que $\chi_P(x) = \chi_Q(x)$. En particular, para $x \in P$ tenemos que

$$1 = \chi_P(x) = \chi_Q(x),$$

lo cual implica que $x \in Q$, es decir, $P \subseteq Q$. Análogamente, para $x \in Q$ obtenemos que $x \in P$. Por tanto, $P = Q$.

También la función φ es sobreyectiva: ya que dada $f \in \mathbb{Z}_2^X = \{0, 1\}^X$ tenemos que

$$f(x) = \begin{cases} 1, \ si\ x \in f^{-1}(\{1\}), \\ 0, \ si\ x \in X \setminus f^{-1}(\{1\}). \end{cases}$$

Por lo que $f = \chi_{f^{-1}(\{1\})}$.

O también,

$$f(x) = \begin{cases} 1, \ si\ x \in f^{-1}(\{0\}), \\ 0, \ si\ x \in X \setminus f^{-1}(\{0\}). \end{cases}$$

Por lo que $f = \chi_{f^{-1}(\{0\})}$.

Consecuentemente, basta tomar $P = f^{-1}(\{1\})$ o $P = f^{-1}(\{0\})$ para garantizar la sobreyectividad de φ.

Por otro lado, es posible chequear que

$$\begin{aligned} \varphi(P \oplus Q) &= \varphi(P) + \varphi(Q), & (3)\\ \varphi(P \odot Q) &= \varphi(P) \cdot \varphi(Q). & (4) \end{aligned}$$

En primer lugar, tenemos que para $x \in X$,

$$\varphi(P \oplus Q)(x) = \chi_{P \oplus Q}(x) = \begin{cases} 1, \; si \; x \in (P \setminus Q) \cup (Q \setminus P), \\ 0, \; si \; x \in (P \cup (X \setminus Q)) \cap (Q \cup (X \setminus P)). \end{cases}$$

Mientras que,

$$(\varphi(P) + \varphi(Q))(x) = \chi_P(x) + \chi_Q(x) = \begin{cases} 1, \; si \; x \in (P \setminus Q) \cup (Q \setminus P), \\ 0, \; si \; x \in (P \cup (X \setminus Q)) \cap (Q \cup (X \setminus P)). \end{cases}$$

Por lo tanto, la relación (3) *es satisfecha.*

Análogamente,

$$\varphi(P \odot Q)(x) = \chi_{P \odot Q}(x) = \begin{cases} 1, \; si \; x \in P \cap Q, \\ 0, \; si \; x \in (X \setminus P) \cup (X \setminus Q). \end{cases}$$

Mientras que,

$$(\varphi(P) \cdot \varphi(Q))(x) = \chi_P(x)\chi_Q(x) = \begin{cases} 1, \; si \; x \in P \cap Q, \\ 0, \; si \; x \in (X \setminus P) \cup (X \setminus Q). \end{cases}$$

Consecuentemente, la relación (4) *también se satisface. Es sencillo chequear que los elementos distinguidos en $\mathcal{P}(X)$ corresponden exactamente con los elementos distinguidos de $\{0,1\}^X$. Como $\varphi : \mathcal{P}(X) \to \{0,1\}^X$ es una función biyectiva que satisface las relaciones* (3), (4), *$\varphi(\emptyset) = 0$ y $\varphi(X) = 1$ entonces necesariamente $\mathcal{P}(X)$ tiene estructura de anillo conmutativo con identidad, pues $\{0,1\}^X$ es un anillo conmutativo con identidad.*

Por la relación (4) *tenemos que*

$$\varphi(P \odot P) = \varphi(P) \cdot \varphi(P) = [\varphi(P)]^2 = \varphi(P),$$

pues $\{0,1\}^X$ es anillo booleano, por tanto $\varphi(P \odot P) = \varphi(P)$, lo que implica que $P \odot P = P$. En conclusión, $\mathcal{P}(X)$ es anillo booleano.

Podemos introducir en cada anillo booleano $\langle A; +; \cdot \rangle$ operaciones similares a las usadas en teoría de conjuntos, dichas operaciones serán definidas como sigue:

$$\begin{aligned} p \wedge q &:= p \cdot q, && (5)\\ p \vee q &:= p + q + (p \cdot q), && (6)\\ p' &:= 1 + p, && (7) \end{aligned}$$

tales operaciones son llamadas conjunción, disyunción y complementación, respectivamente.

PROPOSICIÓN 2.3. *La suma y el producto de un anillo booleano A, pueden ser expresadas en términos de la conjunción, la disyunción y la complementación dadas en* (5), (6) *y* (7), *respectivamente. Dicho en otras palabras, si $p, q \in A$ entonces se cumple que:*

$$\begin{aligned} p \cdot q &= p \wedge q, && (8)\\ p + q &= (p \wedge q') \vee (p' \wedge q). && (9) \end{aligned}$$

Demostración. La ecuación (8) es consecuencia inmediata de la definición (5). Para mostrar la validez de la ecuación (9) es suficiente desarrollar el lado derecho de la misma como sigue:

$$\begin{aligned} (p \wedge q') \vee (p' \wedge q) &= (p \cdot q') \vee (p' \cdot q) = (p \cdot q') + (p' \cdot q) + (p \cdot q') \cdot (p' \cdot q)\\ &= (p \cdot (1+q)) + ((1+p) \cdot q) + (p \cdot (1+q)) \cdot ((1+p) \cdot q)\\ &= p + (p \cdot q) + q + (p \cdot q) + (p + (p \cdot q)) \cdot (q + (p \cdot q))\\ &= p + q + 3(p \cdot q) + (p^2 \cdot q) + (p \cdot q^2) + (p \cdot q)^2\\ &= p + q + 3(p \cdot q) + (p \cdot q) + (p \cdot q) + (p \cdot q)\\ &= p + q + 6(p \cdot q) = p + q + 3[(p \cdot q) + (p \cdot q)]\\ &= p + q, \end{aligned}$$

la última igualdad se deduce del hecho de que $(p \cdot q) + (p \cdot q) = 0$ como consecuencia de la parte i) de la proposición 2.1.

□

DEFINICIÓN **2.1.** *(cfr. [4]). Podemos definir un álgebra booleana, como un conjunto A con dos elementos distinguidos, denotados por 0 y 1, dos operaciones binarias $\vee, \wedge$, y una operación unaria $'$, los cuales satisfacen los siguientes axiomas:*

(1) $0' = 1, \qquad 1' = 0.$

(2) $p \wedge 0 = 0, \qquad p \vee 1 = 1.$

(3) $p \wedge 1 = p, \qquad p \vee 0 = p.$

(4) $p \wedge p' = 0, \qquad p \vee p' = 1.$

(5) $p'' = p.$

(6) $p \wedge p = p, \qquad p \vee p = p.$

(7) $(p \wedge q)' = p' \vee q', \qquad (p \vee q)' = p' \wedge q',$ *(leyes de Morgan).*

(8) $p \wedge q = q \wedge p, \qquad p \vee q = q \vee p,$ *(conmutatividad de la conjunción y la disyunción).*

(9) $(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$, $(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$, *(asociatividad de la conjunción y la disyunción).*

(10) $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$, $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$, *(leyes distributivas).*

Es posible reducir el conjunto de axiomas dados en la definición anterior cuando se consideran anillos booleanos:

PROPOSICIÓN 2.4. *Si R es un anillo booleano, con 0 y 1 como elementos distinguidos y las operaciones conjunción, disyunción y complementación sobre R son las definidas por las ecuaciones* (5), (6) *y* (7), *respectivamente, entonces las identidades* $(3), (4), (8)$ *y* (10) *de la definición 2.1, implican de el resto de los axiomas dados.*

Demostración. Para demostrar este resultado, usaremos la definición de anillos booleanos y la parte $i)$ de la proposición 2.1.

En virtud de (7), tenemos que

- $0' = (1 + 0) = 1$, $1' = (1 + 1) = 0$. Esto prueba el axioma (1) de la definición 2.1.

En virtud de (5) y (6), tenemos que

- $p \wedge 0 = (p \cdot 0) = 0$, $p \vee 1 = p + 1 + (p \cdot 1) = (p + p) + 1 = 1$. Esto prueba el axioma (2) de la definición 2.1.

- $p'' = (1 + p') = 1 + (1 + p) = (1 + 1) + p = p$. Esto prueba el axioma (5) de la definición 2.1.

- $p \wedge p = (p \cdot p) = p^2 = p$, $p \vee p = (p + p) + (p \cdot p) = 0 + p = p$. Por lo tanto el axioma (6) de la definición 2.1 se verifica.

Con respecto al axioma (7) de la definición 2.1 tenemos:

- $(p \wedge q)' = 1 + (p \cdot q) = (1 + p) + (1 + q) + (1 + p) \cdot (1 + q) = p' \vee q'$,
- $(p \vee q)' = (1 + p + q + (p \cdot q)) = (1 + p) \cdot (1 + q) = p' \wedge q'$.

Por lo tanto el axioma (7) también se verifica.

Finalmente, la asociatividad de la operación (5) es inmediata, mientras que con respecto a la operación (6) tenemos:

- $(p \vee q) \vee r = (p \vee q) + r + (p \vee q) \cdot r = p + (q \vee r) + (p \cdot (q \vee r)) = p \vee (q \vee r)$.

Así que también el axioma (9) de la definición 2.1 se verifica.

$\square$

El siguiente resultado nos permite conectar anillos y álgebras booleanas.

TEOREMA 1. *(Teorema de conexión, [4]). Cualquier anillo booleano es un álgebra booleana, y viceversa, toda álgebra booleana es un anillo booleano. Más precisamente:*

i) Si $\langle A; +; \cdot\rangle$ es un anillo booleano, entonces definiendo las operaciones conjunción, disyunción y complementación sobre A a partir de las ecuaciones (5), (6) *y* (7)*, respectivamente, tenemos que $\langle A, \wedge, \vee, '\rangle$ es un álgebra booleana.*

ii) Si $\langle A, \wedge, \vee, '\rangle$ es un álgebra booleana, entonces definiendo las operaciones de producto y suma sobre A por medio de las siguientes identidades:

$$p \cdot q \;:=\; p \wedge q, \tag{10}$$
$$p + q \;:=\; (p \wedge q') \vee (p' \wedge q), \tag{11}$$

con $p, q \in A$, tenemos que $\langle A; +; \cdot\rangle$ es un anillo booleano.

Demostración. $i)$ Sea $\langle A; +; \cdot\rangle$ un anillo booleano. Definamos las operaciones conjunción, disyunción y complementación sobre A a partir de las ecuaciones (5), (6) y (7), entonces, en virtud de la proposición 2.4 es suficiente probar que los axiomas $(3), (4), (8)$ y (10) son satisfechos. Ya que los axiomas $(3), (4)$ y (8) se deducen de manera inmediata, sólo mostraremos la validez del axioma (10).

$$\begin{aligned} p \wedge (q \vee r) &= (p \cdot q) + (p \cdot r) + (p \cdot q \cdot r) = (p \cdot q) + (p \cdot r) + (p^2 \cdot q \cdot r) \\ &= (p \cdot q) + (p \cdot r) + (p \cdot q) \cdot (p \cdot r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r), \end{aligned}$$

análogamente, usando la idempotencia de los elementos de A y la parte $i)$ de la proposición 2.1, obtenemos

$$\begin{aligned} (p \vee q) \wedge (p \vee r) &= (p \vee q) \cdot (p \vee r) = (p + q + (p \cdot q)) \cdot (p + r + (p \cdot r)) \\ &= p^2 + (p \cdot r) + (p^2 \cdot r) + (p \cdot q) + (p^2 \cdot q) + (q \cdot r) + (p \cdot q \cdot r) + (p \cdot q \cdot r) + (p^2 \cdot q \cdot r) \\ &= p + q \cdot r + (p \cdot q \cdot r) = p \vee (q \wedge r). \end{aligned}$$

Con lo cual concluimos que A dotado de las operaciones (5), (6) y (7) es un álgebra booleana.

$ii)$ Sea $\langle A, \wedge, \vee, '\rangle$ un álgebra booleana. Consideremos el producto y la suma definida sobre A por medio de (10) y (11), respectivamente. Entonces veamos que A tiene estructura de anillo booleano con estas operaciones.

En primer lugar, es claro que A es cerrado bajo las operaciones (10) y (11), y que por el axioma (6) de la definición 2.1 los elementos de A son idempotentes. La conmutatividad de la suma (11) se desprende del axioma (8) de la definición 2.1, mientras que por los axiomas $(1), (2)$ y (3) se deduce que el elemento distinguido $0 \in A$ se transforma en el elemento neutro de A.

Por los axiomas (4) y (6) de la definición 2.1 cada elemento es su propio inverso aditivo. Mientras que la asociatividad del producto (10) es consecuencia directa del axioma (9) de la referida definición. El elemento distinguido $1 \in A$ se transforma en la unidad de A gracias al axioma (3).

Finalmente, la asociatividad de la suma (11) y las leyes distributivas del producto (10) respecto a la suma (11), se deducen a partir de los axiomas $(2), (4), (5), (7), (8), (9)$ y (10) aplicados en forma conveniente. □

A continuación mostraremos algunas propiedades y relaciones elementales de álgebras booleanas.

PROPOSICIÓN 2.5. *Sea A un álgebra booleana. Entonces las siguientes propiedades son satisfechas.*

i) Si para todo $p \in A$ tenemos $p \vee q = p$, entonces $q = 0$. Si para todo $p \in A$ tenemos $p \wedge q = p$, entonces $q = 1$.

ii) Si $p, q \in A$ son tales que $p \wedge q = 0$ y $p \vee q = 1$, entonces $q = p'$.

iii) Para todo $p, q \in A$ se tiene que $p \vee (p \wedge q) = p$ y $p \wedge (p \vee q) = p$.

Demostración. i) Si para todo $p \in A$ tenemos $p \vee q = p$, en particular para $p = 0$ obtenemos que $0 \vee q = 0$ y usando los axiomas (3) y (8) de la definición 2.1 deducimos que $q = 0$. Análogamente, si para todo $p \in A$ tenemos $p \wedge q = p$, en particular para $p = 1$ obtenemos $1 \wedge q = 1$ y usando los axiomas (3) y (8) de la definición 2.1 deducimos que $q = 1$.

ii) Por los axiomas (3) y (8) de la definición 2.1 tenemos que $q = 1 \wedge q$, entonces por los axiomas (3) (4), (6) y (10) de la misma definición y nuestra hipótesis (aplicados en orden conveniente), tenemos

$$\begin{aligned} q &= 1 \wedge q = (p \vee p') \wedge q = (p \wedge q) \vee (p' \wedge q) \\ &= 0 \vee (p' \wedge q) = (p' \wedge p) \vee (p' \wedge q) \\ &= p' \wedge (p \vee q) = p' \wedge 1 \\ &= p'. \end{aligned}$$

iii) Aplicando en orden conveniente los axiomas (2), (3), (8) y (10) de la definición 2.1, tenemos

$$\begin{aligned} p \vee (p \wedge q) &= (p \wedge 1) \vee (p \wedge q) = p \wedge (1 \vee q) = p \wedge 1 \\ &= p. \end{aligned}$$

Análogamente, por la aplicación conveniente de los axiomas anteriores, tenemos

$$\begin{aligned} p \wedge (p \vee q) &= (p \vee 0) \wedge (p \vee q) = p \vee (0 \wedge q) = p \vee 0 \\ &= p. \end{aligned}$$

□

La identidades de la parte iii) de la proposición 2.5 son conocidas como leyes de absorción.

DEFINICIÓN **2.2.** *Sean A un álgebra booleana y $p, q \in A$. Se llama sustracción de p y q a la operación definida de la manera siguiente:*

$$p - q := p \wedge q'.$$

Con la esta definición es posible probar la siguiente ley distributiva:

PROPOSICIÓN 2.6. *Sea A un álgebra booleana, entonces para $p, q, r \in A$ se tiene*

$$p \wedge (q - r) = (p \wedge q) - (p \wedge r). \tag{12}$$

Demostración. Usando los axiomas $(2), (4), (7), (8), (9)$ y (10) de la definición 2.1 en orden conveniente, tenemos

$$\begin{aligned}(p \wedge q) - (p \wedge r) &= (p \wedge q) \wedge (p \wedge r)' = (p \wedge q) \wedge (p' \vee r') = [(p \wedge q) \wedge p'] \vee [(p \wedge q) \wedge r'] \\ &= [(p \wedge p') \wedge q] \vee [(p \wedge q) \wedge r'] = (0 \wedge q) \vee [(p \wedge q) \wedge r'] \\ &= 0 \vee [(p \wedge q) \wedge r'] = (p \wedge q) \wedge r' = p \wedge (q \wedge r') \\ &= p \wedge (q - r).\end{aligned}$$

□

Motivado por la analogía de las operaciones $\wedge, \vee, '$ con los operadores lógicos "and", "or" y "not", respectivamente, Halmos [4] introduce en el estudio de álgebras booleanas las operaciones sugeridas por la implicación lógica y el bicondicional lógico, de la forma siguiente:

DEFINICIÓN **2.3.** *Dados A álgebra booleana y $p, q \in A$. Llamaremos implicación y bicondicional a las operaciones definidas como sigue:*

$$p \Rightarrow q := p' \vee q, \tag{13}$$

$$p \Leftrightarrow q := (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p). \tag{14}$$

Note que el resultado de la operación $\Rightarrow$ sobre los elementos $p, q \in A$ es otro elemento de A y lo mismo es cierto para la operación $\Leftrightarrow$ (ver también [4, pág. 19]).

Motivados por las ecuaciones que en teoría de conjuntos nos permiten caracterizar la inclusión de conjuntos, podemos introducir la noción de orden sobre un álgebra booleana. Más precisamente, $P \cap Q = P$ si y sólo si $P \subset Q$ o $P \cup Q = Q$ si y sólo si $P \subset Q$, nos llevan a la siguiente definición:

DEFINICIÓN **2.4.** *Sean A un álgebra booleana y $p, q \in A$. Diremos que $p \leq q$ o $q \geq p$ en el caso que $p \wedge q = p$, o equivalentemente, $p \vee q = q$.*

PROPOSICIÓN 2.7. *Dada un álgebra booleana A. La relación $\leq$ es un orden parcial sobre A. Además, se satisface que*

i) $0 \leq p$ *y* $p \leq 1$, *para todo* $p \in A$.

ii) *Si* $p \leq q$ *y* $r \leq s$, *entonces* $p \wedge r \leq q \wedge s$ *y* $p \vee r \leq q \vee s$.

iii) *Si* $p \leq q$, *entonces* $q' \leq p'$.

iv) $p \leq q$, *si y sólo si,* $p - q = 0$, *o equivalentemente,* $p \Rightarrow q = 1$ *(esto es,* $p' \vee q = 1$*).*

Para los detalles de la demostración de esta proposición el lector puede consultar [4].

DEFINICIÓN **2.5.** *Un retículo X es un conjunto parcialmente ordenado en el cual cualquier conjunto de dos elementos tiene tanto supremo como ínfimo.*

Dado X un retículo, en analogía con las álgebras booleanas denotaremos por $x \vee y = \sup\{x, y\}$ y $x \wedge y = \text{ínf}\{x, y\}$, para cualesquiera $x, y \in X$.

En cualquier retículo X se tiene que si $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$, es satisfecha entonces $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ también es satisfecha, y viceversa. Un retículo X en el cual ambas leyes distributivas son satisfechas es llamado distributivo.

DEFINICIÓN **2.6.** *Un retículo X es llamado complementado si*

- *X contiene dos elementos denotados por 0 y 1 tales que para todo $x \in X$ se tiene $0 \leq x$ y $x \leq 1$.*
- *Para cada $x \in X$ existe al menos un $y \in X$ con $x \wedge y = 0$ y $x \vee y = 1$.*

OBSERVACIÓN 2.1. *Note que si X es un retículo distributivo y complementado entonces el elemento de la segunda parte de la definición 2.6 es único. En efecto, supongamos que para $x \in X$ existen $y_0, y_1 \in X$ tales que $x \wedge y_0 = 0 = x \wedge y_1$ y $x \vee y_0 = 1 = x \vee y_1$. Entonces como consecuencia de las leyes distributivas tenemos:*

$$\begin{aligned} y_1 &= y_1 \wedge 1 = y_1 \wedge (x \vee y_0) = (y_1 \wedge x) \vee (y_1 \wedge y_0) \\ &= (x \wedge y_1) \vee (y_1 \wedge y_0) = 0 \vee (y_1 \wedge y_0) = (x \wedge y_0) \vee (y_1 \wedge y_0) \\ &= (x \vee y_1) \wedge y_0 = 1 \wedge y_0 = y_0, \end{aligned}$$

por lo tanto, $y_0 = y_1$.

TEOREMA 2. *Todo retículo complementado y distributivo es un álgebra booleana.*

Demostración. Sea A un retículo complementado y distributivo, veamos que A satisface los diez axiomas de la definición 2.1 con las operaciones

$$\begin{aligned} p \vee q &:= \sup\{p, q\}, \\ p \wedge q &:= \text{ínf}\{p, q\}, \end{aligned}$$

y complementación $'$ definida a partir de la definición 2.6, de la manera siguiente: dado $p \in A$, existe al menos un elemento $q \in A$ tal que $p \wedge q = 0$ y $p \vee q = 1$, pero por la observación 2.1 este elemento es único cuando A es distributivo, por lo tanto denotaremos a tal elemento q por p' y lo llamaremos complementación de p.

Así, a partir de las propiedades de A obtenemos las operaciones que harán de $\langle A, \wedge, \vee, ' \rangle$ un álgebra booleana. Es claro que los axiomas $(1), (2), (3), (4), (5), (6), (8), (9)$ y (10) de la definición 2.1 se satisfacen, con lo cual nuestro problema se reduce a verificar el axioma (7) de la referida definición.

Por asociatividad, conmutatividad y porque A es un retículo distributivo tenemos que

$$\begin{aligned} (p' \vee q') \wedge (p \wedge q) &= [(p' \vee q') \wedge p] \wedge q = [(p' \wedge p) \vee (q' \wedge p)] \wedge q \\ &= [0 \vee (q' \wedge p)] \wedge q = (q' \wedge p) \wedge q = (p \wedge q') \wedge q \\ &= p \wedge (q' \wedge q) = p \wedge 0 = 0. \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} (p' \vee q') \vee (p \wedge q) &= [(p' \vee q') \vee p] \wedge [(p' \vee q') \vee q] \\ &= [(q' \vee p') \vee p] \wedge [p' \vee (q' \vee q)] = [q' \vee (p' \vee p)] \wedge [p' \vee (q' \vee q)] \\ &= (q' \vee 1) \wedge (p' \vee 1) = 1 \wedge 1 = 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(p' \vee q') \wedge (p \wedge q) = 0$ y $(p' \vee q') \vee (p \wedge q) = 1$, con lo cual $(p \wedge q)' = p' \vee q'$.

Un razonamiento similar nos llevará a que $(p \vee q)' = p' \wedge q'$. □

Ahora estamos en condiciones de entregar una defición de álgebras booleanas, la cual es más comúnmente utilizada: **Un álgebra booleana A es un retículo complementado y distributivo.**

3. Homomorfismos de álgebras booleanas

En esta sección recordaremos las definiciones y algunas propiedades de subálgebras e ideales booleanos. Nuestro objetivo será presentar y demostrar dos teoremas fundamentales de homomorfismos de álgebras booleanas, utilizando para ello el teorema de conexión 1. El lector interesado encontrará en [4, 12] excelentes recursos para profundizar en el tema.

DEFINICIÓN **3.1.** *Una subálgebra de un álgebra booleana A, es un subconjunto B de A, tal que B junto con los elementos distinguidos y operaciones de A es un álgebra booleana.*

EJEMPLO 3.1. *Sean X un conjunto no vacío e $Y \subseteq X$ no vació, entonces $\mathcal{P}(Y)$ no es una subálgebra booleana de $\mathcal{P}(X)$. En efecto, por el ejemplo 2.6 y el teorema 1, sabemos que $\mathcal{P}(X)$ y $\mathcal{P}(Y)$ son álgebras booleanas. Como $Y \subseteq X$, entonces $\mathcal{P}(Y) \subseteq \mathcal{P}(X)$, pero la unidad de $\mathcal{P}(X)$ es X mientras que la unidad de $\mathcal{P}(Y)$ es Y, por lo que los elementos distinguidos de $\mathcal{P}(X)$ no coinciden con los elementos distinguidos de $\mathcal{P}(Y)$, y por la definición 3.1, concluimos que $\mathcal{P}(Y)$ no es una subálgebra booleana de $\mathcal{P}(X)$.*

Las operaciones booleanas de una subálgebra booleana, por definición, deben ser restricciones de las operaciones booleanas del álgebra inicial:

EJEMPLO 3.2. *Sea (X, Ω) un espacio topológico. Un abierto $P \in \Omega$ se dice regular si $P = (\overline{P})^\circ$. Sea $\mathcal{H}$ la familia de todos los conjuntos regulares de X, entonces se puede mostrar que con las siguientes operaciones $\mathcal{H}$ tiene estructura de álgebra booleana.*

$$\begin{aligned} P \wedge Q &:= P \cap Q, \\ P \vee Q &:= (P \cup Q)^{\perp\perp}, \\ P' &:= P^{\perp}, \end{aligned}$$

donde $P^{\perp}$ denota al conjunto $X \setminus \overline{P}$, para todo $P \subseteq X$.

Los elementos distinguidos de $\mathcal{H}$ son $0_{\mathcal{H}} = \emptyset$ y $1_{\mathcal{H}} = X$.

Es claro que $\mathcal{H} \subseteq \Omega \subseteq \mathcal{P}(X)$, pero a pesar de que $\mathcal{H}$ tiene los mismos elementos distinguidos que $\mathcal{P}(X)$, $\mathcal{H}$ no es una subálgebra booleana de $\mathcal{P}(X)$, ya que las operaciones que definen a $\mathcal{P}(X)$ y a $\mathcal{H}$ como álgebras booleanas son diferentes.

PROPOSICIÓN 3.1. *Sean A un álgebra booleana y B un subconjunto de A. Entonces B es subálgebra booleana de A si B es cerrada bajo la disyunción y complementación de A restrictas a B.*

Demostración. Para probar que B es una subálgebra booleana de A debemos probar en primer lugar que B es cerrado bajo las operaciones de A, por hipótesis se tiene que B es cerrado bajo la disyunción y la complementación, con lo que nuestro problema se reduce a mostrar que B también es cerrado bajo la conjunción de A, para esto usaremos las Leyes de Morgan (axioma (7) de la definición 2.1). Sean $p, q \in B$, por hipótesis sabemos que $p \vee q \in B$ y $p', q' \in B$, y por tanto $p' \vee q' \in B$, entonces de acuerdo a las Leyes de Morgan tenemos que $(p \wedge q)' = p' \vee q' \in B$.

Por otro lado, como B es cerrado bajo complementación, entonces $(p \wedge q)'' \in B$, pero por el axioma (5) de la definición 2.1 sabemos que $(p \wedge q)'' = p \wedge q$, en consecuencia $p \wedge q \in B$.

También los elementos distinguidos de A, 1_A y 0_A están en B. En efecto; para $p \in B$, por hipótesis $p', (p \vee p') \in B$, luego por el axioma (4) de la definición 2.1 tenemos que $1_A = p \vee p' \in B$. Por lo tanto, $1_A \in B$. Análogamente, $p \wedge p' \in B$ y por el axioma (4) de la referida definición $0_A = p \wedge p' \in B$, consecuentemente, $0_A \in B$.

Finalmente, es sencillo chequear que B satisface los axiomas de la definición 2.1, con lo cual B es una subálgebra booleana de A. □

DEFINICIÓN **3.2.** *Sea B un álgebra booleana. Un ideal booleano es un subconjunto $M \subseteq B$ que satisface:*

i) $0 \in M$.

ii) *Si $p, q \in M$, entonces $p \vee q \in M$.*

iii) *Si $p \in M$ y $q \in B$, entonces $p \wedge q \in M$.*

OBSERVACIÓN 3.1. *Note que la condición i) de la definición anterior puede ser reemplazada por la condición "M distinto de vacío", pues, si M es no vacío, existe al menos un $p \in M$, y por la condición iii) de la definición anterior tendríamos que $p \wedge 0 \in M$, pero como B es un álgebra booleana se cumple que $p \wedge 0 = 0$, por tanto $0 \in M$.*

La definición 3.2, no es la única manera de definir un ideal booleano, esta definición se puede dar a partir de teoría de anillos, así como también usando la noción de orden. La siguiente caracterización de ideales booleanos es en términos de anillos booleanos:

PROPOSICIÓN 3.2. *Un subconjunto I de un álgebra booleana B es un ideal booleano, si y sólo si, I es un ideal en el anillo booleano B.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que I es un ideal booleano de un álgebra booleana B. Si $p \in I$ y $q \in B$ por la condición iii) de la definición 3.2, sabemos que $p \wedge q \in I$, luego usando la identidad (10) de la parte ii) del teorema de conexión 1, tenemos que $p \cdot q \in I$. Análogamente, si $p, q \in I$, entonces como $p', q' \in B$, por la condición iii) de la definición 3.2, sabemos que $p \wedge q' \in I$ y $p' \wedge q \in I$, por tanto por la condición ii) de la misma definición, tenemos que $(p \wedge q') \vee (p' \wedge q) \in I$. Entonces, usando la identidad (11) de la parte ii) del teorema de conexión 1, tenemos que $p+q \in I$. Finalmente, no es difícil mostrar que $(I, +)$ es un grupo abeliano y, consecuentemente, I es un ideal en el anillo booleano B.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que I es un ideal en el anillo booleano B. Es claro que $0 \in I$. Si $p \in I$ y $q \in B$, sabemos que $p \cdot q \in I$, pero por la parte i) del teorema de conexión 1, usando la identidad (5) obtenemos que $p \wedge q \in I$. Mientras que si $p, q \in I$, entonces $p + q \in I$. En virtud de la parte i) del teorema de conexión 1, la identidad (6) y el hecho de que $p \cdot q \in I$, obtenemos que $p \vee q \in I$. Por lo tanto, según la definición 3.2, I es un ideal booleano del álgebra booleana B. □

OBSERVACIÓN 3.2. *La condición iii) de la definición 3.2 puede ser sustituida por: "Si $p \in M$ y $q \leq p$, entonces $q \in M$" (recordemos que si $p, q \in B$, entonces $q \leq p$ siempre que $p \wedge q = q$).*

EJEMPLO 3.3. *Sean X un conjunto no vacío y $\mathfrak{H} = \{P \in \mathcal{P}(X) : P$ es numerable $\}$. La familia $\mathfrak{H}$ es un ideal en $\mathcal{P}(X)$.*

Toda álgebra booleana B contiene un ideal trivial, formado justamente por 0. Análogamente, toda álgebra booleana B contiene un ideal impropio: el mismo B. Diremos que un ideal I de B es propio si $I \neq B$.

PROPOSICIÓN 3.3. *Sea B un álgebra booleana. Un ideal booleano $I \subseteq B$ es propio, si y sólo si, $1_B \notin I$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que I es un ideal propio de B y que $1_B \in I$, entonces, para todo $p \in B$, la condición iii) de la definición 3.2 nos dice que $p \wedge 1_B = p \in I$, con lo cual $I = B$, lo que contradice el hecho de que I sea un ideal propio de B. Por lo tanto, $1_B \notin I$.

($\Leftarrow$) Si $1_B \notin I$ es inmediato que $I \neq B$, es decir, I es un ideal booleano propio. □

DEFINICIÓN **3.3.** *Sea B un álgebra booleana.*

i) Dado $E \subseteq B$. La intersección de todos los ideales en B que contienen a E, es también un ideal booleano, y se le llama el ideal generado por E. Lo denotaremos por $I(E)$.

ii) Para $p \in B$, el ideal generado por el conjunto $\{p\}$ es llamado ideal principal de B. Lo denotaremos por $\langle p \rangle$.

iii) Sea I un ideal de B, diremos que I es un ideal completo, si el supremo de cada subconjunto de I está contenido en I.

iv) Un ideal I es maximal en B si $I \neq B$ y además si M es un ideal propio B tal que $I \subset M$, entonces $I = M$ o $M = B$.

EJEMPLO 3.4. *a) Si $E = \emptyset$, entonces $I(E)$ es el ideal trivial.*

b) Todo ideal completo de un álgebra booleana es un ideal principal de la misma.

c) El ideal trivial es maximal en el álgebra booleana $\{0, 1\}$.

Todo ideal maximal de un álgebra booleana está caracterizado por la siguiente propiedad.

LEMA 1. *Un ideal I en un álgebra booleana B es maximal, si y sólo si, para cada $p \in B$ se tiene que $p \in I$ o $p' \in I$, pero no ambos.*

Para la demostración del lema anterior el lector puede consultar [4, pág. 52].

DEFINICIÓN **3.4.** *Sean A y B álgebras booleanas. Un homomorfismo booleano es una aplicación $f : A \to B$ que es compatible con las operaciones de disjunción, conjunción y complementación de ambas álgebras, es decir, la aplicación $f : A \to B$ satisface*

$$f(p \vee q) = f(p) \vee f(q), \tag{15}$$

$$f(p \wedge q) = f(p) \wedge f(q), \tag{16}$$

$$f(p') = (f(p))', \tag{17}$$

para cualesquiera $p, q \in A$.

DEFINICIÓN **3.5.** *Un homomorfismo booleano $f : A \to B$ se dice monomorfismo si $f(p) = f(q)$ implica que $p = q$, es decir, si f es inyectiva. Si f es sobreyectiva entonces decimos que f es un epimorfismo y si f es biyectiva decimos que f es un isomorfismo. Si $B = A$ decimos que f es un endomorfismo y por último f es automorfismo si es endomorfismo e isomorfismo a la vez. Si existe un isomorfismo entre A y B entonces A y B son llamadas álgebras booleanas isomorfas. Denotaremos que A y B son isomorfas escribiendo $A \cong B$.*

Al igual que en las álgebras booleanas, los elementos distinguidos también juegan un rol importante en los homomorfismos booleanos. Ciertamente, todo homomorfismo booleano preserva elementos distinguidos. En efecto, sea $f : A \to B$ un homomorfismo booleano, entonces

$$\begin{aligned} f(0_A) &= f(p \wedge p') = f(p) \wedge f(p') = f(p) \wedge (f(p))' = 0_B, \quad \text{y} \\ f(1_A) &= f(p \vee p') = f(p) \vee f(p') = f(p) \vee (f(p))' = 1_B. \end{aligned}$$

LEMA 2. *Sean A y B álgebras booleanas. La aplicación $f : A \to B$ tal que para todo $p \in A$ $f(p) = 0_B$, no es un homomorfismo booleano. En otras palabras, en la teoría de álgebras booleanas no existe un homomorfismo trivial.*

Demostración. Supongamos que la aplicación $f : A \to B$ tal que para todo $p \in A$ $f(p) = 0_B$ es un homomorfismo booleano. Entonces

$$1_B = f(p) \vee (f(p))' = f(p \vee p') = 0_B,$$

con lo cual $1_B = 0_B$, pero esto es una contradicción, pues en un álgebra booleana los elementos distinguidos deben ser diferentes. Por lo tanto, no existe un homomorfismo trivial. $\square$

DEFINICIÓN **3.6.** *Sea $f : A \to B$ un homomorfismo booleano. Definimos el kernel y la imagen de f como los conjuntos*

$$\begin{aligned} ker(f) &:= \{p \in A : f(p) = 0\}, \\ f(A) &:= \{f(p) : p \in A\}. \end{aligned}$$

PROPOSICIÓN 3.4. *Sea $f : A \to B$ un homomorfismo booleano, entonces*

i) El kernel de f es un ideal booleano en A.

ii) f es monomorfismo, si y sólo si, $ker(f) = 0$.

iii) $f(A)$ es subálgebra booleana de B.

Para la demostración de la proposición anterior el lector puede consultar [4].

Los homomorfismos booleanos también preservan las operaciones de suma, diferencia, producto e implicación, como se muestra en el siguiente resultado.

TEOREMA 3. *Sea $f : A \to B$ un homomorfismo booleano, entonces para $p, q \in A$ tenemos*

$$f(p+q) = f(p) + f(q), \tag{18}$$

$$f(p \Rightarrow q) = f(p) \Rightarrow f(q), \tag{19}$$

$$f(p-q) = f(p) - f(q), \tag{20}$$

$$f(p \cdot q) = f(p) \cdot f(q). \tag{21}$$

Para la demostración del teorema anterior el lector puede consultar [4, pág. 36]. El siguiente resultado es una consecuencia inmediata del teorema anterior.

COROLARIO 3.1. *Todo homomorfismo booleano es un homomorfismo entre anillos booleanos, y viceversa, todo homomorfismo entre anillos booleanos es un homomorfismo booleano. Además, todo homomorfismo booleano preserva el orden, es decir, si $p \leq q$, entonces $f(p) \leq f(q)$.*

La definición 3.2, garantiza que el kernel de cada homomorfismo booleano es un ideal booleano. Dado que para todo homomorfismo booleano f se cumple que $f(1) \neq 0$, se tiene que el kernel de cada homomorfismo booleano es un ideal propio. Luego, es natural preguntarse qué sucede en el caso contrario, es decir, ¿cada ideal propio es el kernel de algún homomorfismo booleano? La respuesta a esta pregunta es afirmativa, siempre y cuando, el ideal sea maximal, como muestra el siguiente lema.

LEMA 3. *Cada ideal booleano maximal es el kernel de algún homomorfismo booleano.*

Para la demostración de este lema el lector puede consultar [4, pág. 53]. El lema anterior es un caso especial del siguiente resultado, conocido como *primer teorema fundamental de homomorfismos booleanos*.

TEOREMA 4. *(Primer teorema fundamental de homomorfismos booleanos). Todo ideal booleano propio es el kernel de algún epimorfismo booleano.*

Demostración. Sea B un álgebra booleana, por el teorema de conexión 1, B también tiene estructura de anillo booleano. Si $M \subset B$ es un ideal propio de B, entonces el cociente B/M tiene estructura de anillo con las siguientes operaciones

$$\begin{aligned} \overline{p} \oplus \overline{q} &:= \overline{p+q}, \\ \overline{p} \odot \overline{q} &:= \overline{p \cdot q}, \end{aligned}$$

donde $p, q \in B$ y $+, \cdot$ son las operaciones de suma y producto en el anillo booleano B. Más aún, con las operaciones $\langle B/M; \oplus; \odot \rangle$, es un anillo con unidad en el que todos sus elementos son idempotentes, es decir, es un anillo booleano.

Definiendo la aplicación $\varphi : B \to B/M$, dada por $\varphi(p) = \overline{p}$ para cada $p \in B$, tenemos que φ está bien definida y

$$\begin{aligned} \varphi(p+q) &= \overline{p+q} = \overline{p} \oplus \overline{q} = \varphi(p) \oplus \varphi(q), \\ \varphi(p \cdot q) &= \overline{p \cdot q} = \overline{p} \odot \overline{q} = \varphi(p) \odot \varphi(q), \end{aligned}$$

para $p, q \in B$. Por lo tanto φ es un homomorfismo de anillos, el cual adicionalmente es sobreyectivo. Otra vez, por el teorema de conexión 1, B/M tiene estructura de álgebra booleana y finalmente tenemos que

$$\begin{aligned} \varphi(p \vee q) &= \varphi(p+q+(p \cdot q)) = \overline{p} \oplus \overline{q} \oplus (\overline{p} \odot \overline{q}) = \varphi(p) \oplus \varphi(q) \oplus (\varphi(p) \odot \varphi(q)) \\ &= \varphi(p) \vee \varphi(q), \end{aligned}$$

$$\varphi(p \wedge q) = \varphi(p \cdot q) = \varphi(p) \odot \varphi(q) = \varphi(p) \wedge \varphi(q),$$

$$\varphi(p') = \varphi(1+p) = 1 \oplus \varphi(p) = (\varphi(p))',$$

con lo cual, de acuerdo a las definiciones 3.4 y 3.5, φ es un epimorfismo booleano. Finalmente, la igualdad $M = ker(\varphi)$ es consecuencia inmediata de la definición de φ. □

El álgebra booleana B/M es usualmente llamada el cociente de B módulo M.

TEOREMA 5. *(Segundo teorema fundamental de homomorfismos booleanos). Sean B, B' dos álgebras booleanas y $\varphi : B \to B'$ un homomorfismo booleano, entonces $\varphi(B) \cong B/ker(\varphi)$. En otras palabras, $\varphi(B)$ es isomorfa al cociente de B módulo $ker(\varphi)$.*

Demostración. Debemos hallar un isomorfismo booleano Ψ, tal que el siguiente diagrama sea conmutativo:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & \varphi(B) \\ & B/ker(\varphi) \arrow[u, dotted, "\Psi"'] \end{tikzcd}$$

Tal isomorfismo Ψ se define para cada $\overline{p} \in B/ker(\varphi)$ como $\Psi(\overline{p}) = \varphi(p)$. Por el teorema 1, $B, \varphi(B)$ y $B/ker(\varphi)$ tienen estructura de anillos booleanos, por ello podemos demostrar este teorema a partir de la teoría de anillos.

La aplicación Ψ está bien definida, ya que si $\overline{p} = \overline{q}$, entonces $\overline{p-q} = \overline{0}$ y en consecuencia $p - q \in ker(\varphi)$. Ahora, como $p - q \in ker(\varphi)$ tenemos que

$$0_{B'} = \varphi(p-q) = \varphi(p) - \varphi(q),$$

de donde resulta que $\varphi(p) = \varphi(q)$, es decir, $\Psi(\overline{p}) = \Psi(\overline{q})$.

Sean $\overline{p}, \overline{q} \in B/ker(\varphi)$ entonces

$$\begin{aligned} \Psi(\overline{p} \oplus \overline{q}) &= \Psi(\overline{p+q}) = \varphi(p+q) = \varphi(p) + \varphi(q) = \Psi(\overline{p}) + \Psi(\overline{q}), \\ \Psi(\overline{p} \odot \overline{q}) &= \Psi(\overline{p \cdot q}) = \varphi(p \cdot q) = \varphi(p) \cdot \varphi(q) = \Psi(\overline{p}) \cdot \Psi(\overline{q}). \end{aligned}$$

Por lo tanto, Ψ es un homomorfismo de anillos. Es claro que Ψ es sobreyectiva, así que veamos la inyectividad de Ψ: supongamos que $\Psi(\overline{p}) = \Psi(\overline{q})$, entonces $\varphi(p) = \varphi(q)$, con lo que $p - q \in ker(\varphi)$, o lo que es equivalente; $\overline{p-q} = \overline{0}$, es decir, $\overline{p} = \overline{q}$. Con lo que hemos probado que Ψ es un isomorfismo de anillos. Finalmente, para chequear que Ψ es un isomorfismo de álgebras booleanas, basta utilizar el teorema de conexión 1 y proceder de manera similar a la parte final de la demostración del teorema 4. □

4. El código genético y $\mathbb{Z}_2^6$

Es común escuchar que las álgebras booleanas son la base de la información digital, que son parte fundamental de los circuitos electrónicos, que el funcionamiento de las computadoras está basado en la estructura booleana del sistema binario. Pero no es natural imaginar que dentro de los organismos vivos se pudiera hacer uso de estructuras booleanas. Para ahondar un poco en el tema, en esta sección describiremos brevemente un modelo del código genético dado en términos de álgebras booleanas. Para ello seguiremos el enfoque dado en [3], en el cual se consideran las álgebras booleanas desde su definición como retículos.

El código genético es el sistema bioquímico que permite establecer las reglas a través de las cuales la secuencia de nucleótidos de un gen es transcrita en la secuencia de codones del ARN mensajero (ARNm o mRNA, por sus siglas en inglés) y luego traducida en la secuencia de aminoácidos de la proteína correspondiente. El conjunto de codones es una extensión del alfabeto de cuatro letras de la molécula de ADN. Estas "letras" son las moléculas básicas del ADN: Adenina, Guanina, Citosina y Tiamina, usualmente denotadas por A, G, C y T, respectivamente, y las cuales también conocidas como bases nitrogenadas o bases de nucleótidos. Ellas se parean en la doble hélice del ADN de acuerdo a los puentes de hidrógeno: G con C (tres puentes) y A con T (dos puentes), ver Figura 1.

La organización no-aleatoria del código genético se ha enfatizado en muchos trabajos y se han propuesto algunas hipótesis sobre dicha organización, pero el origen de este orden continua siendo un enigma (ver por ejemplo, [3] y las referencias allí sugeridas).

El ARN mensajero es el ácido ribonucleico que contiene la información genética (el código genético) procedente del ADN del núcleo celular a un ribosoma en el citoplasma, es decir, el que determina el orden en que se unirán los aminoácidos y actúa como plantilla o patrón para la síntesis de proteínas. Similarmente al caso del ADN, las moléculas básicas del ARNm son representadas por las letras A, G, C y U, correspondientes a la Adenina,

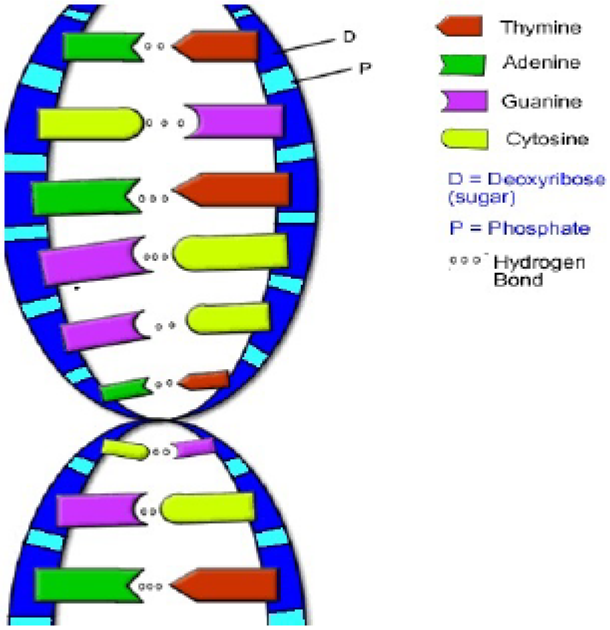

Figura 1: Bases de nucleótidos del ADN.

la Guanina, la Citosina y el Uracilo, respectivamente, (recordemos que en el ARNm la Timina es sustituida por el Uracilo), ver Figura 2.

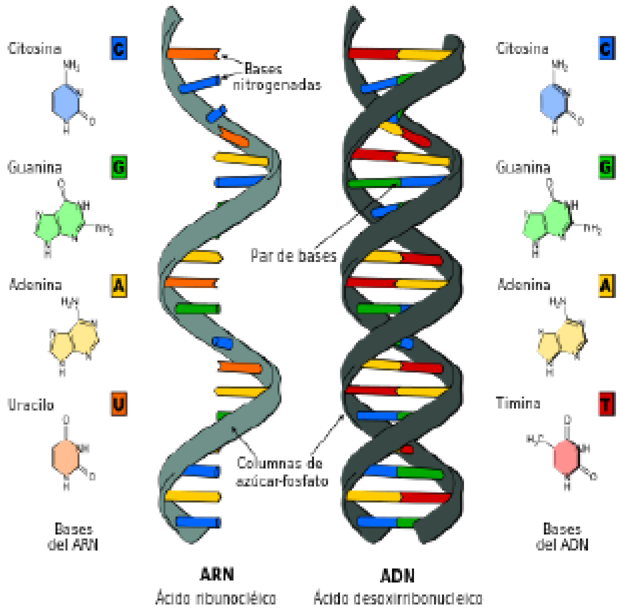

Figura 2: ARN mensajero vs. ADN.

Han existido varios intentos para introducir caracterizaciones formales (incluso algebraicas) del código genético, una de tales caracterizaciones involucra la representación binaria de las cuatro bases nitrogenadas del ARNm y un orden sugerido para ellas (ver [3] y las referencias allí sugeridas).

En [3] se muestra que es posible dotar al conjunto $X = \{U, C, G, A\}$, de las cuatro bases del ARNm de un orden y una estructura booleana de la siguiente forma:

1. Se parte de que en cualquier retículo booleano $(B(X), \vee, \wedge)$, construido a partir de un conjunto X, dados dos elementos $\alpha, \beta \in X$, tenemos que $\alpha \leq \beta$ si y sólo si $\alpha' \vee \beta = 1$ o equivalentemente, $\alpha \wedge \beta' = 0$, donde 1 es el elemento máximo del retículo booleano y 0 el elemento mínimo. Además, si $\alpha \leq \beta$ o $\alpha \geq \beta$ se dice que los elementos α y β son comparables. Dos elementos $\alpha, \beta \in X$, se dicen complementarios si y sólo si $\alpha \vee \beta = 1$ y $\alpha \wedge \beta = 0$.

2. Es conocido también que en cualquier retículo booleano con cuatro elementos todos los elementos son comparables excepto dos de ellos, que son complementarios.

3. El retículo booleano de las cuatro bases nitrogenadas $X = \{U, C, G, A\}$ se construye asumiendo que las bases complementarias en el retículo son también complementarias (apareadas) en la molécula del ADN. Este retículo de cuatro bases debe tener un máximo, un mínimo y dos elementos no comparables.

Así, existen solamente dos posibilidades para el retículo de las cuatro bases nitrogenadas: Una opción es el retículo cuyo mínimo elemento sea C y el máximo G y la segunda opción es el retículo con mínimo elemento G y máximo C. Por otro lado, U y A son complementarios, ya que ambos tienen el mismo número mínimo de puentes de hidrógeno. Pero como los codones (esto es, tripletas formadas a partir de las cuatro bases nitrogenadas) AAA y UUU codifican aminoácidos con polaridades opuestas entonces, A y U no pueden ser comparables. A partir de estas observaciones se obtienen dos retículos booleanos de las cuatro bases de nucleótidos, llamados convencionalmente retículo primal $(B(X), \vee, \wedge)$ y retículo dual $(\tilde{B}(X), \vee, \wedge)$. En [3] toman como retículo primal al formado por las cuatro bases nitrogenadas cuyo máximo elemento es C y mínimo elemento es G. Por su parte, el retículo dual es el que tiene como máximo y mínimo elemento a G y C, respectivamente, donde $X = \{U, C, G, A\}$. Es importante destacar, que el significado biológico de los retículos primal y dual es el mismo.

Desde el punto de vista algebraico el álgebra booleana $\langle B(X), \vee, \wedge, ' \rangle$ es isomorfa a $\mathbb{Z}_2^2$. Esto resulta del hecho de que todo par de retículos booleanos con la misma cardinalidad son isomorfos (ver [12]). Por tanto, es posible establecer un isomorfismo booleano $\varphi : B(X) \to \mathbb{Z}_2^2$ dado por

$$\varphi(x) := \begin{cases} (\overline{0}, \overline{0}), & \text{si } x = G, \\ (\overline{0}, \overline{1}), & \text{si } x = A, \\ (\overline{1}, \overline{0}), & \text{si } x = U, \\ (\overline{1}, \overline{1}), & \text{si } x = C. \end{cases}$$

Del mismo modo, el álgebra booleana dual $\langle \tilde{B}(X), \vee, \wedge, ' \rangle$ es isomorfa a $\mathbb{Z}_2^2$. En este caso podemos considerar el isomorfismo booleano $\tilde{\varphi} : \tilde{B}(X) \to \mathbb{Z}_2^2$ dado por

$$\varphi(x) := \begin{cases} (\overline{0}, \overline{0}), & \text{si } x = C, \\ (\overline{0}, \overline{1}), & \text{si } x = U, \\ (\overline{1}, \overline{0}), & \text{si } x = A, \\ (\overline{1}, \overline{1}), & \text{si } x = G. \end{cases}$$

En la Figura 3 se muestran los respectivos diagramas de Hasse del álgebra booleana primal y del álgebra booleana dual, respectivamente.

En [3] se parte del conjunto de las cuatro bases nitrogenadas del ARNm para llegar al conjunto de los 64 codones del código genético. La idea es obtener un retículo booleano para los codones del código genético,

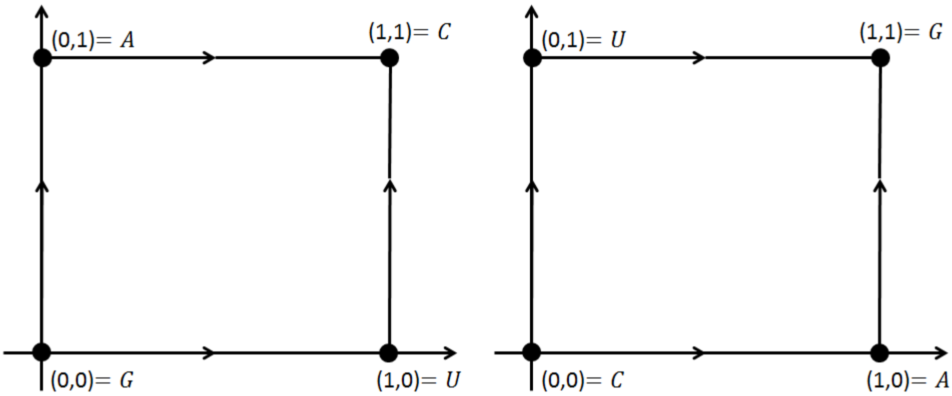

Figura 3: Álgebras primal y dual del ARNm.

inducido por el retículo de las cuatro bases nitrogenadas del ARNm, $B(X)$ o $\tilde{B}(X)$, dependiendo de si se toma el retículo primal o dual, respectivamente. Recordemos que los codones son tripletas formadas por los elementos de X, con $X = \{U, C, G, A\}$, y cada codón codifica al menos un aminoácido. En la Figura 4 se muestran los 64 codones del ARNm.

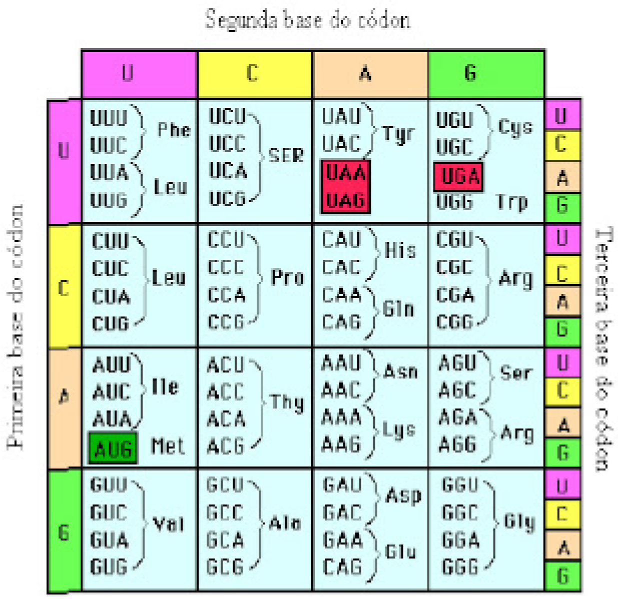

Figura 4: Tripletas o codones del ARNm.

Sea $C(X)$ el álgebra booleana inducida para los codones, es decir, el álgebra inducida para los codones a partir de $B(X)$. Usando el hecho de que el producto cartesiano finito de álgebras booleanas es un álgebra Booleana, se obtiene que $C(X)$ es isomorfa a $B(X) \times B(X) \times B(X)$. Pero, ya que $B(X) \cong \mathbb{Z}_2^2$, se obtiene que

$$C(X) \cong B(X) \times B(X) \times B(X) \cong \mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_2^2 \cong \mathbb{Z}_2^6.$$

Por ejemplo, para definir un isomorfismo booleano $\Psi : C(X) \to \mathbb{Z}_2^6$ podemos partir del isomorfismo φ :

$B(X) \rightarrow \mathbb{Z}_2^2$ anteriormente definido, procediendo de la forma siguiente: a cada codón Ψ le asigna una 6-tupla correspondiente a un elemento de $\mathbb{Z}_2^6$, la cual se compone precisamente de las imágenes de φ en cada una de las componentes del codón. Así, Ψ se define para cada codón de $C(X)$ como se ilustra en la Figura 5. Análogamente, si partimos del retículo dual $\tilde{B}(X)$ obtendremos un retículo dual para los 64 codones, pero el significado biológico en ambos casos es el mismo.

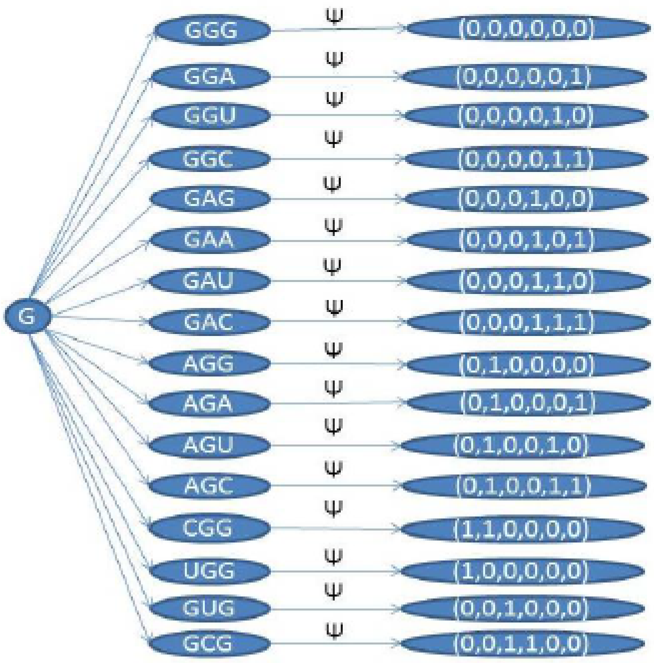

Figura 5: Los 16 codones del ARNm asociados a la Guanina (G) y sus correspondientes imágenes por Ψ.

Como es señalado en [3], el retículo $C(X)$ de los 64 codones del ARNm es seleccionado tomando en cuanta también los siguientes aspectos:

1. La relación de orden parcial del retículo $C(X)$ está inducida por el orden dado en $B(X)$, es decir, para cada $(\alpha_1\beta_1\gamma_1), (\alpha_2\beta_2\gamma_2) \in C(X)$ decimos que $(\alpha_1\beta_1\gamma_1) \leq (\alpha_2\beta_2\gamma_2)$, si y sólo si, $(\alpha_1\beta_1\gamma_1)' \vee (\alpha_2\beta_2\gamma_2) = 1$, donde 1 es el elemento máximo de $C(X)$. Además, si las complementaciones de α_1, β_1 y γ_1 son α_1', β_1' y γ_1', respectivamente, entonces $(\alpha_1\beta_1\gamma_1)' = (\alpha_1'\beta_1'\gamma_1')$.

2. Se asume que el elemento máximo en $C(X)$ (ver Figura 4) debe ser la tripleta del elemento máximo del retículo $B(X)$ (o respectivamente, $\tilde{B}(X)$).

3. Para obtener un retículo booleano con la significación biológica deseada los autores de [3] tuvieron en cuenta las propiedades físico-químicas de estos codones y sus aminoácidos respectivos, en particular:

   - Ambos codones GGG y CCC tienen el mismo número máximo de puentes de hidógeno. esta propiedad debería estar reflejada en el retículo de forma que GGG sea complementario a CCC. Además, ambos codifican para cadenas de aminoácidos pequeñas con poca diferencia en la polaridad: Glicina y Prolina. Esta propiedad de “similaridad” determinó que estos elementos deberían ser comparables.

   - Los codones UUU y AAA tienen el mismo número mínimo de puentes de hidógeno entre ellos, y por tanto, la complementación de UUU en el retículo debería ser AAA. Pero estas tripletas codifican para cadenas de aminoácidos con polaridades opuestas extremas (Leucina y Lisina). Consecuentemente, esta propiedad “opuesta” determinó que estos elementos no fueran comparables.

Adicionalmente, el diagrama de Hasse asociado a $C(X)$ (cfr. [3]) muestra que existen conexiones entre las propiedades algebraicas de $C(X)$ y las propiedades físico-químicas de los aminoácidos. Por ejemplo, la complementación de un codón que codifica para un aminoácido hidrofóbico es siempre un codón que codifica para un aminoácido hidrofílico. Recordemos que los codones que codifican un aminoácido hidrofílico deben tener la base nitrogenada A en la segunda posición, mientras que los codones que codifican un aminoácido hidrofóbico tienen a U en la segunda posición.

Según [3] estos resultados sugieren que las propiedades algebraicas de los codones en el retículo booleano $C(X)$ están asociadas con las propiedades hidrofóbicas e hidrofílicas de los aminoácidos, y a su vez, estas propiedades hidrofóbicas tienen un papel fundamental en el proceso de plegamiento de las proteínas, y se sabe que la función biológica de una proteína depende de un correcto plegamiento. Por tanto, las propiedades algebraicas de los retículos booleanos del código genético son de gran ayuda para entender los cambios hidrofóbicos en los procesos de mutación de un gen.

Sin embargo, los autores de [3], no explotan suficientemente las propiedades de los isomorfismos booleanos. Sería interesante por ejemplo, ver que significado biológico tendrían los isomorfismos de $\mathbb{Z}_2^6$ en $\mathbb{Z}_2^6$. Sabemos que estos isomorfismos son precisamente permutaciones de los elementos de $\mathbb{Z}_2^6$, entonces es posible pensar que cada permutación de $\mathbb{Z}_2^6$ representa una mutación en el código genético. ¿Acaso cada permutación implica un cambio en el orden en que se unirán los aminoácidos para sintetizar una proteína determinada?, ¿es posible que cada permutación de $\mathbb{Z}_2^6$ altere el correcto plegamiento de las proteínas? Estas preguntas son inquietudes que nos han surgido al revisar el trabajo realizado en [3].

Referencias

[1] Betz, C.: *"Introducción a la Teoría de la Medida e Integración"*. Imprenta Universitaria-UCV. Caracas, Venezuela. (1992).

[2] Boole, G.: *"An investigation of the laws of thought"*. Publications, Inc. Cork, Irlanda. (1854).

[3] Grau, R., Chavez, M., Sanchez, R., Morgado, E., Casas, G., Bonet, I.: *"Boolean Algebraic Structures of the Genetic Code: Possibilities of Applications"*. En *Knowledge Discovery and Emergent Complexity in Bioinformatics*. First International Workshop, KDECB 2006, Ghent, Belgium, May 10, 2006. Revised Selected Papers. Karl Tuyls et al. Editors. Lecture Notes in Computer Sciences, Vol. 4366, 10-21, (2007).

[4] Halmos, P.: *"Lectures on Boolean Algebras"*. Springer-Verlag, New York, USA. (1974).

[5] Halmos, P.: *"The Legend of John Von Neumann"*. Amer. Math. Montly, 80 (4), 382-394, (1973).

[6] Herstein, I. N.: *"Álgebra Abstracta"*. Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. Distrito Capital, México. (1988).

[7] Huntington, E. V.: *"New sets of independent postulates for the algebra of logic"* , Trans. Amer. Math. Soc. 35, 274-304, (1933).

[8] Peinado, R. E.: *"Elementos nilpotentes e idempotentes en los anillos $\mathbb{Z}_n$"*, Revista Matemática Hispanamericana, 26, No. 1-2, (1966).

[9] Royden, H. L.: *"Real Analysis"*. Prentice Hall. London, Inglaterra. (1995).

[10] Shannon, C. E.: *"A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits"*, Trans. AIEE, 57 (12), 713-723, (1938).

[11] Turing, A.: *"On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem"*, Proc. Lond. Math. Soc. Series 2, 42, 230-265, (1936-7). Errata aparecida en Series 2, 43, 544-546, (1937).

[12] Vladimirov, D. A.: *"Boolean Algebras in Analysis"*. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht, Netherlands. (2002).

Para citar este articulo: QUINTANA y HERNÁNDEZ, 2015, " *Estructuras booleanas y el código genético: algunos comentarios* ".
Disponible en Revistas y publicaciones de la Universidad del Atlántico en:
http://investigaciones.uniatlantico.edu.co/revistas/index.php/MATUA.